Matematica III

Docenti: Francesca De Marchis e Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni,
CdL in Statistica, Economia e Società, CdL in Statistica Gestionale
A.A. 2022/2023

Esercitazione 3

Esercizio 1. Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

1) $f(x,y) = \sin(xy)$ 2) $f(x,y) = \dfrac{\tan x}{\tan y}$ 3) $f(x,y) = \log\left(\sin \dfrac{1+x}{y}\right)$

4) $f(x,y) = \sqrt{2 + x^2y^4 + \sin^5(\dfrac{1}{x})}$ 5) $f(x,y) = x^y$ 6) $f(x,y) = |x-y| \quad \text{per } x \neq y$

8) $f(x,y,z) = \cos(e^{xy}) \arcsin(yz)$ 9) $f(x) = \|x\|\,, \text{ per } x \neq 0$ 10) $f(x) = x \cdot v$, con $v \in \mathbb{R}^N$ fissato.

In 9)-10), x è la variabile in $\mathbb{R}^N$, quindi $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Esercizio 2. Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \sqrt[6]{x^4y^2}$$

è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Esercizio 3. Si studi la continuità, derivabilità e differenziabilità per ciascuna delle seguenti funzioni

$$f_1(x,y) = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f_1(0,0) = 0;$$

$$f_2(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x^4y^2}}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f_2(0,0) = 0;$$

$$f_3(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x^4y^5}}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f_3(0,0) = 0.$$

Esercizio 4. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{x^2+y^2+x^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

dove $\alpha > 0$. Si chiede di determinare i valori di α tali che:

- f è continua in $\mathbb{R}^2$;
- f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Per tali valori di α scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto (0,0,0).

Esercizio 5. Data

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^a y}{x^2+3y^2} & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

studiare la continuità di f al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$.

Esercizio 6. Sia

$$f(x,y) = |y| \sin(x^2+y^2).$$

- Calcolare $\nabla f(x,y)$ con $y \neq 0$.
- Calcolare $\nabla f(\pm\sqrt{n\pi}, 0)$ per $n = 0, 1, 2, ...$
- Dimostrare che f non è derivabile nei punti $(x, 0)$ con $x \neq \pm\sqrt{n\pi}$.

Esercizio 7. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione $f(x,y) = |x\,y|^a$ è differenziabile nell'origine.

Esercizio 8. Data

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^3}{((x-1)^2+(y-1)^2)^a} & (x,y) \neq (1,1) \\ \\ 0 & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$.